С.Н.Куприянова

Теория поля

Методические указания

Содержание

1. Скалярные и векторные поля

Множество E точек рассматриваемого пространства, совместно с приписанными этим точкам числами, называется скалярным полем. Скалярным полем часто называют и саму функцию F(M), породившую это поле на точечном множестве E. Если E – множество точек на плоскости, то скалярное поле называется плоским; если же E – множество точек в трехмерном пространстве, то поле называется пространственным.

Для пространственного скалярного поля F(M)=F(x, y, z) уравнение F(x, y, z)=C с переменным параметром C определяет семейство поверхностей уровня. Если F(M)=const во всей области E, то множество точек, удовлетворяющих уравнению F(M)=F(x, y, z), либо пусто, либо совпадает с областью E.

Градиент скалярного поля u(M)=u(x, y, z) определяется равенством

$$\overline{grad\, u} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

Если в каждой точке M данной области E соответствует определенный вектор $\bar{a}(M)$, то говорят, что в области E задано векторное поле. В декартовой системе координат векторное поле $\bar{a}(M)$ задается тремя функциями P, Q, R, определенными в области E

$$\bar{a}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$$

Здесь и в дальнейшем будем предполагать, что эти функции во всей области непрерывны вместе с частными производными. Для плоского векторного поля:

$$\bar{a}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j}$$

Векторной линией данного поля $\vec{a}(M)$ называют такую линию ℓ, в каждой точке которой вектор $\vec{a}(M)$ имеет направление касательной к этой линии. Через каждую точку векторного поля проходит (при условии, что $|\vec{a}(M)| \neq 0$) одна векторная линия. Совокупность всех векторных линий определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P(x,y)}=\frac{dy}{Q(x,y)}; dz=0.$$

Упражнения

1. Найти линии уровня плоского поля u=xy.

2. Найти поверхности уровня скалярного поля:

$$u=arctg\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

3. Найти поверхности уровня скалярного поля:

$$u=\frac{1}{2x+3y-4z+1}$$

4.Установить область определения и найти линии и поверхности уровня скалярного поля:

$$u=\sqrt{9-x^2-y^2}$$

$u=\frac{e}{r}$ (потенциал электрического поля)

5. Найти поверхности уровня сферически симметричного поля:

$$u=\cos r, (\mathrm{r}=\sqrt{\mathrm{x}^2+y^2+z^2})$$

6.Установить область определения и найти линии и поверхности уровня скалярного поля:

$$u=\arcsin\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$u=\sin(x^2-y^2)$$

$$u=\frac{x^2+y^2}{z}$$

7. Найти градиент скалярного поля:

$$u(P)=x$$

$$u(P)=y$$

$$u(P)=z$$

8. Найти градиент скалярного поля $u(x,y)=\sqrt{4+x^2+y^2}$ в точке M(2;1).

9. Найти градиент скалярного поля:

а) $u(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-xy-4x+2y-4z$ в точке М(0,0,0)

б) $u(x,y,z)=3x^2y-3y^3+y^4$ в точке М(1,2,1)

в) $u=arctg\,\dfrac{y}{x}$

10. Найти grad $(\bar{c},\bar{r})$, где $(\bar{c})$ − постоянный вектор.

11. Найти векторные линии поля $\overline{F}(M)=ax\bar{i}-ay\bar{j}-2az\bar{k}$ (a=$const$).

12. Найти линии тока плоского потока жидкости, характеризуемого вектором скорости $\bar{a}(M)=x\bar{i}-2x(x-1)\bar{j}$.

13. Найти векторные линии сферически симметричного поля.

14. Найти векторные линии поля $\bar{a}(M)=\dfrac{1}{x}\bar{i}+\dfrac{1}{y}\bar{j}$

15. Найти векторные линии поля $\bar{a}(M)=\dfrac{1}{x^2}\bar{i}+\dfrac{1}{y^2}\bar{j}+\dfrac{1}{z^2}\bar{k}$

16. Найти уравнения семейства векторных линий поля:

$\bar{a}(M)=(x^2-y^2-z^2)\bar{i}+2xy\bar{j}+2xz\bar{k}$

17. Найти векторные поля $\vec{a}=\left[\vec{c}\times\vec{r}\right]$, где $\bar{c}$ − постоянный вектор.

18. Найти силовые линии:

а) магнитного поля прямолинейного тока;

б) гравитационного поля точечного источника.

19. Поток несжимаемой жидкости имеет потенциал $\varphi(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Найти траектории движения частиц жидкости.

20. В точке (0;0) найти направление, в котором функция $z=x\sin y$ + $y\cos x$ изменяется быстрее всего.

21. 1) Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z=\ln(x^2+4y^2)$ в точке $(6;\ 4;\ \ln 100)$.

2) Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z=x^y$ в точке (2; 2; 4).

22. Каково направление наибольшего изменения функции $\phi(x,y,z)=x\sin z-y\cos z$ в начале координат?

23. 1) $z = \arcsin\frac{x}{x+y}$. Найти угол между градиентами этой функции в точках (1; 1) и (3; 4).

2) Даны функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Найти угол между градиентами этих функций в точке (3; 4).

2. Поток векторного поля через поверхность

Пусть векторное поле образовано вектором $\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$. Для наглядности будем считать $\overline{a}(M)$ вектором скорости некоторого потока жидкости, движущейся стационарно. Представим, что некоторая поверхность S находится в этом потоке и пропускает жидкость. Подсчитаем какое количество жидкости К протекает через поверхность S.

Выберем определенную сторону поверхности S. Пусть $\overline{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ - единичный вектор нормали к рассматриваемой стороне поверхности S. Разобьем поверхность на элементарные площадки S_1, S_2,… , S_n. Выберем в каждой площадке точку M_i (i=1, 2,…, n) и вычислим значение вектора скорости $\overline{a}(M)$ в каждой точке: $\overline{a}(M_1)$, $\overline{a}(M_2)$,…, $\overline{a}(M_n)$.

За единицу времени через S_i протекает количество жидкости, приблизительно равное

$$K_i \approx H_i \cdot \Delta S_i,$$

где ΔS_i – площадь i-ой площадки,

H_i– высота i-го цилиндра с образующей $\overline{a}(M)$.

Следовательно, общее количество жидкости, протекающее через всю поверхность S за единицу времени, найдем, вычислив сумму

$$K \approx \sum_{i=1}^{n} \overline{a}(M_i) \cdot \overline{n_i} \cdot \Delta S_i.$$

Точное значение искомого количества жидкости получим, взяв предел найденной суммы при неограниченном увеличении числа элементарных площадок и стремлении к нулю их размеров (диаметров d_i площадок):

$$K = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \bar{a}(M_i) \cdot \overline{n_i} \cdot \Delta S_i = \iint_S \bar{a}(M) \cdot \bar{n} \cdot ds$$

Независимо от физического смысла поля $\bar{a}(M)$ полученный интеграл называют потоком векторного поля.

Потоком вектора $\bar{a}$ ***через поверхность*** **S** называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности, т.е.

$$K = \iint_S \bar{a}\bar{n} \cdot ds$$

Существуют различные формы записи потока вектора.

$$K = \iint_S a_n \cdot ds ,$$

где a_n – проекция вектора $\bar{a}$ на направление нормали $\bar{n}$,

ds - дифференциал (элемент) площади поверхности.

$$K = \iint_S \bar{a} \cdot \overline{ds}$$

где $\overline{ds}$ направлен по нормали к поверхности, причем $\left|\overline{ds}\right| = ds$.

Так как $\bar{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, $\bar{a} = (P; Q; R)$, где $P = P(x; y; z)$, $Q = Q(x; y; z)$, $R = R(x; y; z)$ - проекция вектора $\bar{a}$ на соответствующие координатные оси, то поток вектора $\bar{a}$, можно записать в виде

$$K = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds .$$

Используя взаимосвязь поверхностных интегралов I и II рода, поток вектора можно записать как

$$K = \iint_S (Pdy\,dz + Qdx\,dz + Rdx\,dy$$

Поток К вектора $\bar{a}$ есть скалярная величина. Величина К равна объему жидкости, которая протекает через поверхность S за единицу времени. В этом состоит физический смысл потока (независимо от физического смысла поля).

Особый интерес представляет случай, когда поверхность замкнута и ограничивает некоторый объем V. Тогда поток вектора записывается в виде

$$K=\oiint_S \overline{a}\overline{n}\,ds \quad (\text{иногда } \oint_S \overline{a}\overline{n}\,\mathrm{ds} \text{ или } \oint_S a_n\,ds,\ldots).$$

В этом случае направление $\overline{n}$ обычно берут направление внешней нормали и говорят о потоке изнутри поверхности S.

Упражнения

Вычислить поток векторного поля $\overline{a}$ через поверхность S в сторону, определяемую единичной нормалью n к поверхности S

1. $\overline{a}=xi-zj+y^2k$, S – прямоугольник: $0\le x\le 2$, $0\le y\le 1$, нормаль n направлена вверх.

2. $\overline{a}=x^2i-2xyj+zk$, S – сфера: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, n – внешняя нормаль.

3. $\overline{a}=(1-yz)i+(1+xz)j+2(x+y)k$, S – часть параболоида $z=x^2+y^2$, заключенная между плоскостями z=0, z=1, n –нормаль, образующая тупой угол с осью Q_z.

4. $\overline{a}=zi+(1-z)j+xyk$, S – часть плоскости x+y=1, ограниченная плоскостями z=0, z=1, n –нормаль, образующая тупой угол с осью Q_z.

5. $\overline{a}(0,0,z)$, S – часть конуса $z^2=x^2+y^2$, заключенная между плоскостями z=0, z=1, n –нормаль, образующая тупой угол с осью Q_z.

6. $\overline{a}(x^2,y^2,z^2)$, S – боковая поверхность цилиндра, заключенная между плоскостями z=0, z=2, n –внешняя нормаль.

7. Найти поток радиуса-вектора r через боковую поверхность пирамиды, вершина которой находится в точке A(4,5,3), а основанием служит четырехугольник с вершинами B(0,0,0), C(1,1,0), D(3,-1,0), E(2,-2,0).

8. Найти поток векторного поля $\overline{a}(yz,x+2yz,z^2-z)$ через поверхность параллелепипеда, построенного на векторах OA, OB и OC, где O(0,0,0), A(1,-2,1), B(3,2,1), C(1,0,-1).

9. Показать, что поток градиента скалярного поля U, являющегося гармонической функцией (т.е. удовлетворяющей уравнению $\Delta U=0$) через любую замкнутую поверхность равен 0.

10. Показать, что поток grand (c, r), где r – радиус-вектор, а c - фиксированный вектор, через произвольную замкнутую поверхность равен 0.

11. Найти поток поля c×r через поверхность $x^2+y^2+z^2=R^2$ в направлении внешней нормали.

3. Циркуляция векторного поля вдоль кривой

Пусть векторное поле $\bar{a}$ определено в пространственной области *E*. Выберем в этой области какую-нибудь кривую ℓ. Ориентируем эту кривую, указав на ней положительное направление. Пусть $\overline{\tau^{\circ}}$ - орт касательной в точке M к кривой ℓ, совпадающей по направлением кривой. Разобьем кривую ℓ любым образом на *n* "элементарных дуг" длиной ΔS_k ($k=1,2, \dots,n$) в направлении от *A* к *B* и в произвольном месте каждой элементарной дуги возьмем по точке M_k .Для *k*-й элементарной дуги составим произведение

$$(\bar{a}(M_k), \overline{\tau^{\circ}}(M_k))\Delta S_k$$

а затем просуммируем все подобные произведения по всем *k*:

$$\sum_{k=1}^{n}(\bar{a}(M_k), \overline{\tau^{\circ}}(M_k))\Delta S_k$$

Мы пришли к интегральной сумме первого рода по кривой ℓ. Если функции *P, Q, R* непрерывны в области *E*, а $\max\Delta S_k$ – наибольшая из длин ΔS_k, то при условии $\max\Delta S_k \to 0$ сумма стремится к конечному пределу, которым является криволинейный интеграл первого рода от функции $(\bar{a}(M_k), \overline{\tau^{\circ}}(M_k))$ по кривой ℓ:

$$\int_l (\bar{a}, \overline{\tau^{\circ}})ds$$

Вводя в рассмотрение векторный элемент $d\bar{s} = \overline{\tau^{\circ}}ds$ линии ℓ с координатами dx, dy, dz, можем представить интеграл в координатной форме:

$$\int_l (\bar{a}, \overline{\tau^{\circ}})ds = \int_l (\bar{a}, \overline{\tau^{\circ}}ds) = \int_l (\bar{a}, \overline{ds}) = \int_l Pdx + Qdy + Rdz$$

Особенно большую роль играет в теории поля криволинейный интеграл в случае, когда кривая ℓ, по которой он берется, замкнута, т.е. в случае когда конец *B* этой кривой совпадает с ее началом *A*. В этом случае криволинейный интеграл называется циркуляцией векторного поля $\bar{a}(M)$ по замкнутой кривой ℓ и обозначается символом $Ц_l(\bar{a})$:

$$Ц_l(\bar{a}) = \int_l (\bar{a}, \overline{\tau^\circ})ds = \int_l (\bar{a}, \overline{ds}) = \int_l Pdx + Qdy + Rdz$$

Упражнения

1. Вычислить циркуляцию плоского векторного поля $\bar{a} = y^2\bar{i} + x\bar{j}$ вдоль кривой $x=3cost$, $y=sint$ с обходом по часовой стрелке.

2. Вычислить циркуляцию вектора $\bar{a} = -y\bar{i} + x\bar{j} + \bar{\kappa}$ вдоль окружности $x^2+y^2=1$, $z=0$ в положительном направлении.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M) = xyz\bar{i} + (x+y+z)\bar{j} - x^2y^2\bar{\kappa}$ вдоль контура квадрата ABCDA, определяемого уравнениями: $-x+y=a$; $x+y=a$; $x-y=a$; $x+y=-a$; $z=0$.

4. Найти циркуляцию поля $\bar{a} = y\bar{i}$ по контуру окружности $x=b\cos t$, $y=b+b\sin t$, расположенной в плоскости XOY.

5. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{\kappa}$ вдоль окружности $x^2+y^2=R^2$; $z=0$.

6. Вычислить циркуляцию поля $\bar{a} = x^2y\bar{i} + \bar{j} + z\bar{\kappa}$ вдоль окружности $x^2+y^2=R$, $z=0$.

7. Найти циркуляцию Ц вектора $\bar{a} = -y\bar{i} + x\bar{j} + c\bar{\kappa}$ (с - постоянная):

а) вдоль окружности $x^2+y^2=1$, $z=0$;

б) вдоль окружности $(x-2)^2+y^2=1$, $z=0$.

4. Дивергенция. Формула Гаусса-Остроградского

Важной характеристикой векторного поля является так называемая дивергенция, характеризующая распределение и интенсивность источников и стоков поля.

Дивергенцией (или расходимостью) векторного поля

$\bar{a}(M) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$

в точке M называется скаляр вида $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ и обозначается символом $div\,\overline{a}(M)$, т.е.

$$div\,\overline{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Свойства дивергенции.

1. Если $\overline{a}$ - постоянный вектор, $div\,\overline{a}=0$.

2. $div\,(c\cdot\overline{a})=c\cdot div\overline{a}$, где $c=const.$

3. $div\,(\overline{a}+\overline{b})=div\overline{a}+div\overline{b}$, т.е. дивергенция суммы двух векторных функций равна сумме дивергенции слагаемых.

4. Если U – скалярная функция, $\overline{a}$ - вектор, то $div\,(U\cdot\overline{a})=U\cdot div\overline{a}+\overline{a}gradU$.

Используя понятия потока и дивергенции векторного поля, запишем формулу Остроградского-Гаусса

$$\oiint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})d\upsilon$$

в векторной форме:

$$\oiint_S a_n ds=\iiint_V div\overline{a}\cdot d\upsilon$$

Формула Остроградского-Гаусса означает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность S (в направлении внешней нормали, т.е. изнутри) равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему V, ограниченную данной поверхностью.

Используя формулу Остроградского-Гаусса, можно дать другое определение дивергенции векторного поля $\overline{a}(M)$ в точке M (не связанное с выбором координатных осей).

По теореме о среднем для тройного интеграла имеем:

$$\iiint_V div\overline{a}(M)\cdot d\upsilon=V\cdot div\overline{a}(M_0),$$

где M_0 – некоторая (средняя) точка области V. Тогда $\oiint_S a_n dS=V\cdot div\overline{a}(M_0)$. Отсюда

$$div\bar{a}(M_0) = \frac{1}{V}\oint\!\!\oint_S a_n ds .$$

Пусть поверхность S стягивается в точку. Тогда V→0, M_0→M, и мы получаем выражение для $div\bar{a}(M)$ в точке М:

$$div\bar{a}(M_0) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\!\!\oint_S a_n ds .$$

Дивергенцией векторного поля в точке М называется предел отношения потока поля через (замкнутую) поверхность S, окружающую точку М, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку М (V→0).

Упражнения

Применяя формулу Остроградского-Гаусса, преобразовать поверхностные интегралы в интегралы по объему:

1. $\iint\limits_{(\Phi)}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds$.

2. $\iint\limits_{(\Phi)}(x^2 + y^2 + z^2)(dydz + dxdz + dxdy)$.

3. $\iint\limits_{(\Phi)} xydxdy + yzdydz + xzdzdx$.

С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить следующие интегралы:

4. $\iint\limits_{(\Phi)}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds$, где Φ – поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

5. $\iint\limits_{(\Phi)}(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)ds$, где Φ – поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R$.

6. $\iint\limits_{(\Phi)} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где Φ – поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $(0\le z \le b)$.

7. Найти дивергенцию вектора $\bar{a} = (x - y^2)\bar{i} + x^2z\bar{j} + xy\bar{k}$.

8. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, преобразовать поверхностный интеграл

$\iint\limits_{П} x^2 ydydz + y^3 dxdz + zxdxdy$ в интеграл по объему.

9. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(\Phi)} x^2 zdxdy + y^2 xdydz$, где Φ - полная поверхность параболоида $z=x^2+y^2$, ограниченного плоскостью $z=1$.

10. Пользуясь формулой Остроградского–Гаусса, вычислить поверхностные интегралы по внешней стороне поверхности Φ (если поверхность не замкнутая, дополните её до замкнутой).

а) $\iint\limits_{(\Phi)} xdydz + ydxdz + zdxdy$, где Φ – сфера $x^2+y^2=z^2$

б) $\iint\limits_{(\Phi)} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, где Φ – часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$ при $0\le z \le h$.

в) $\iint\limits_{(\Phi)} yzdydz + zxdzdx + xydxdy$, где Φ – граница тела $x^2+y^2\le a^2$, $0\le z \le h$.

г) $\iint\limits_{(\Phi)} xdydz + ydxdz + zdxdy$, где Φ – часть поверхности $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ при $0\le z \le 1$.

д) $\iint\limits_{(\Phi)} ydydz + zdzdx + xdxdy$, где Φ – поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=a$ $(a>0)$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

е) $\iint\limits_{(\Phi)} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, где Φ – сфера $x^2+y^2+z^2=x$

ж) $\iint\limits_{(\Phi)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где Φ – поверхность куба $0\le x \le a$, $0\le y \le a$, $0\le z \le a$.

5. Ротор векторного поля. Формула Стокса

Ротором (или вихрем) ***векторного поля***

$$\bar{a} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$$

называется вектор, обозначаемый $rot\bar{a}(M)$ и определяемый формулой

$$r\text{ot}\,\overline{a}(M)=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\overline{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\overline{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\overline{k}\,.$$

$$\text{rot}\,\overline{a}(M)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

Свойства ротора:

1. Если $\overline{a}$ - постоянный вектор, $r\text{ot}\,\overline{a}=0$.

2. $r\text{ot}\,(\text{c}\cdot\overline{a})=c\cdot rot\overline{a}$, где *c=const.*

3. $r\text{ot}\,(\overline{a}+\overline{b})=rot\overline{a}+rot\overline{b}$, т.е. ротор суммы двух векторных функций равна сумме роторов слагаемых.

4. Если U – скалярная функция, $\overline{a}$ - вектор, то $r\text{ot}(U\cdot\overline{a})=U\cdot rot\overline{a}+gradU\times\overline{a}$.

Используя понятия ротора и циркуляции, векторного поля, запишем формулу Стокса

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dxdz+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

в виде

$$\oint_L a_\tau dl=\iint_S rot_n\overline{a}ds$$

Используя формулу Стокса, можно дать другое определение ротора поля, эквивалентное первому и не зависящее от выбора координатной системы.

По теореме о среднем для поверхностного интеграла имеем:

$$\iint_S rot_n\overline{a}ds=rot_n\overline{a}(M_0)\cdot S\,,$$

где M_0 – некоторая (средняя) точка площадки S

$$\oint_L a_\tau dl=rot_n\overline{a}(M_0)\cdot S$$

Отсюда:

$$rot_n\overline{a}(M_0)=\frac{1}{S}\oint_L a_\tau dl$$

Пусть контур L стягивается в точку M. Тогда $M_0 \to M$, а $S \to 0$. Перейдя к пределу, получаем:

$$rot_n \bar{a}(M_0) = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_L a_\tau dl$$

Ротором вектора $\bar{a}$ ***в точке*** M называется вектор, проекция которого на данное направление равна пределу отношения циркуляции вектора $\bar{a}$ по контуру L плоской площадки S, перпендикулярной этому направлению, к этой площадки.

Как видно из определения, ротор вектора $\bar{a}(M)$ есть векторная величина, образующая собственное векторное поле.

Упражнения

1. Доказать свойства ротора:

а) $\mathrm{rot}\,(\bar{c}) = 0$; $\left[\bar{\nabla}\bar{c}\right] = 0$, где $c=const.$

б) $rot(c_1\overline{a_1} + c_2\overline{a_2}) = c_1 rot\overline{a_1} + c_2 rot\overline{a_2}$

$\left[\bar{\nabla},(c_1\overline{a_1} + c_2\overline{a_2})\right] = c_1[\bar{\nabla}\overline{a_1}] + c_2[\bar{\nabla}\overline{a_2}]$, где c_1, c_2 – постоянные коэффициенты

в) $rotu\bar{a} = \left[grandu, \bar{a} + u, rot\bar{a}; [\bar{\nabla}, u, \overline{a_1})\right] = [\bar{\nabla}u, \overline{a_1}] + u[\bar{\nabla}\overline{a_1}]$, где u – скалярное поле.

2. Вычислить ротор векторного поля:

а) $\bar{a} = \sin(2x - y - z)(2\bar{i} - \bar{j} + \bar{R})$;

б) $\bar{a} = xyz(x\bar{i} - y\bar{j} + z\bar{R})$;

в) $\bar{a} = arctg(x - y + z)(\bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k})$

3. Вычислить ротор векторного поля $\bar{a} = e^{x+2y+3z}(3x\bar{i} + 2y\bar{j} + z\bar{k})$ в точке $M_0(3,-3,1)$.

4. Найти функцию векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j})$ вдоль замкнутой линии *ABOA*, где *AB* – дуга астроиды, определяемой уравнением: $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$ или $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$.

5. С помощью формулы Стокса найти циркуляцию векотрного поля

$\bar{a}(M) = xyz\bar{i} + (x + y + z)\bar{i} - x^2y^2\bar{R}$ вдоль контура квадрата *ABCDA* определяемого уравнениями: $-x+y=a$; $x+y=a$; $x-y=a$; $x+y=-a$; $z=0$.

6. Вычислить с помощью формулы Стокса циркуляцию векторного поля $\bar{a} = (x+z)\bar{i} + (z-1)\bar{j} + (y-x)\bar{R}$ вдоль окружностей:

а) $(y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$, $x=5$ (вектор положительной нормали $\bar{n} = \bar{i}$);

б) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$, $z=0$ (вектор положительной нормали $\bar{n} = \bar{k}$).

7. Доказать, что $rot(\overline{a_1}(M) + \overline{a_2}(M)) = rot\overline{a_1}(M) + rot\overline{a_2}(M)$.

6. Векторные дифференциальные операции I и II порядков

Основными дифференциальными операциями (действия) над скалярным полем U и векторным полем $\bar{a}$ являются $gradU$, $div\,\bar{a}$, $rot\bar{a}$. Действия взятия градиента, дивергенции и ротора называются векторными операциями первого порядка.

Эти операции удобно записывать с помощью оператора Гамильтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$$

Этот символический вектор называют также оператором ∇; он приобретает определенный смысл лишь в комбинации со скалярными или векторными функциями.

Применяя оператор Гамильтона, получим дифференциальные операции первого порядка:

1. $\nabla U = (\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}) \cdot U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = gradU$

2. $\nabla\bar{a} = (\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}) \cdot (P\cdot\bar{i} + Q\cdot\bar{j} + R\cdot\bar{k}) = \frac{\partial P}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial R}{\partial z}\bar{k} = div\bar{a}$

3. $\nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\,\bar{a}$

Оператор Гамильтона применяется для записи и других операций и для вывода различных формул в теории поля. При действиях с ним надо пользоваться правилами векторной алгебры и правилами дифференцирования.

В частности, производная по направлению может быть записана в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \nabla U \cdot \bar{e} = (\bar{e}\cdot\nabla)\cdot U\,,$$

где $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

После применения оператора Гамильтона к скалярному или векторному полю получается новое поле, к которому можно снова применить этот оператор. В результате получается дифференциальные операции второго порядка. Нетрудно убедиться, что имеется лишь пять дифференцированных операций второго порядка: *div gradU, rot gradU* $grad\ div\,\bar{a}$, $div\ rot\bar{a}$, $rot\ rot\bar{a}$:

1. $div\ gradU = \nabla(\Delta\nabla) = (\nabla\cdot\nabla)U = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\cdot U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$

2. $rotU = \nabla\times(\Delta\nabla) = (\nabla\times\nabla)U = 0$, так как векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю (нуль-вектор). Это означает, что поле градиента есть поле безвихревое.

3.
$$grad\ div\,\bar{a} = \nabla(\nabla\cdot\bar{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(div\bar{a})\cdot\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(div\bar{a})\cdot\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(div\bar{a})\cdot\bar{k} =$$
$$= (\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x})\bar{i} + (\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z})\bar{j} + (\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2})\bar{k}$$

4. $div\ rot\bar{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\bar{a}) = 0$, так как смешанное произведение трех векторов, из которых два одинаковые, равно нулю. Это означает, что поле вихря - соленоидальное.

5. $\mathrm{rot}\ rot\bar{a} = \nabla\times(\nabla\times\bar{a}) = \nabla(\nabla\cdot\bar{a}) - (\nabla\cdot\nabla)\bar{a} = grad\ div\bar{a} - \Delta\bar{a}$, а так как двойное векторное произведение обладает свойством $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c} - \bar{c}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}$.

Здесь $\Delta\bar{a} = \Delta P\bar{i} + \Delta Q\bar{j} + \Delta R\bar{k}$ - векторная величина, полученная в результате применения оператора Лапласа к вектору $\bar{a}$.

7. Основные классы векторных полей

Векторное поле $\bar{a}$ ***называется соленоидальным***, если во всех точках его дивергенция поля равна нулю, т.е. $div\,\bar{a}$.

Примером соленоидальных полей являются: поле линейных скоростей вращающегося твердого тела; магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого течет электрический ток, и другие.

Свойства соленоидального поля:

1. В соленоидальном поле $\bar{a}$ поток вектора через любую замкнутую поверхность равна нулю. Это свойство непосредственно вытекает из формулы Остроградского-Гаусса. Таким образом, соленоидальное поле не имеет источников и стоков.

2. Соленоидальное поле является полем ротора, некоторого векторного поля, т.е. если $div\,\bar{a} = 0$, то существует такое поле $\bar{b}$, что $\bar{a} = rot\bar{b}$. Вектор $\bar{b}$ называется векторным потенциалом поля $\bar{a}$.

3. В соленоидальном поле $\bar{a}$ поток вектора через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значении (называемое интенсивностью трубки).

Векторное поле $\bar{a}$ ***называется потенциальным*** (или бизвихревым, или градиентным), если во всех точках поля ротор равен нулю, т.е. $rot\bar{a} = 0$. примером потенциального поля является электрическое поля напряженности точечного заряда (и другие).

Свойства потенциального поля:

1. Циркуляция потенциального поля $\bar{a}$ по любому замкнутому контуру в этом поле равна нулю. Это непосредственно вытекает из формулы Стокса.

2. В потенциальном поле $\bar{a}$ криволинейный интеграл $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ вдоль любой кривой *L* с началом в точке M_1 и концом в точке M_2 зависит только от положения точек M_1 и M_2 и не зависит от формы кривой.

3. Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции *U(x; y; z)*, т.е. $rot\bar{a} = 0$, то существует функция U(x; y; z) такая, что $\bar{a} = gradU$.

Из равенства $\bar{a} = gradU$ следует, что потенциальное поле определяется заданием одной скалярной функции *U=U(x; y; z)* – его потенциала. Потенциал векторного поля может быть найден по формуле

$$U(x;y;z) = \int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(x_0)}^{(x)} P(\chi;y_0;z_0)d\chi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;\xi;z_0)d\xi + \int\limits_{z_0}^{z} Q(x;y;\varsigma)d\varsigma + c$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты фиксированной точки; $(x; y; z)$ - координаты произвольной точки. Потенциал определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого (из-за того, что $grad(U + a = gradU$).

Произвольное же векторное поле требует задания трех скалярных функций ($P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ – проекции вектора поля на оси координат).

Векторное поле $\bar{a}$ ***называется гармоническим*** (или лапласовым), если оно одновременно является потенциальным и соленоидальным, т.е. если $rot\bar{a} = 0$ и $div\,\bar{a} = 0$.

Примером гармонического поля является поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков.

Так как поле $\bar{a}$ потенциально, то его можно записать в виде $\bar{a} = gradU$, где $U=U(x; y; z)$ – потенциал поля.

Но так как поле одновременно и соленоидальное, то

$$div\,\bar{a} = div\ gradU = 0,$$

или, что то же самое,

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

т.е. потенциальная функция U гармонического поля $\bar{a}$ является решением дифференциального уравнения Лапласа. Такая функция называется гармонической.

Упражнения

1. Являются ли следующие векторные поля потенциальными?

а) F=r

б) F=(x^2, -y^2, xz)

в) F= y^2(1-z)i+2xy(1-z)j-(xy^2-3z^2)k

г) F=xi+yxj+zyk

д) F=xyi-zj+xk

2. Показать, что следующие векторные поля потенциальны, и найти их потенциалы:

а) $F=x^2i+y^2j+z^2k$

б) $F=yzi+xzj+yxk$

в) $F(z-2x, z-2y, x+y)$

г) $F(y^2z^3, 2xyz^3+z^2, 3xy^2z^2+2yz+1)$

3. Показать, что плоское поле

$F(2xy^3+2xy\sin(x^2y), 3x^2y^2+x^2\sin(x^2y)$

потенциально, и найти его потенциал.

4. Показать, что если векторное поле $F=f(r)\cdot r$, где $r=xi+yj+zk$ и $r=|r|$, соленоидально, то $f(r)=\frac{k}{r^3}$

5. Будет ли пространственное поле $F=r\cdot(c\times r)$, где $r=xi+yj+zk$ и $r=|r|$, и с – постоянный вектор, соленоидальным?

6. Показать, что пространственное поле $F=f(r)\cdot r$, где $r=(x,y,z)$ и $r=|r|$, потенциально и найти его потенциал.

7. Показать, что если векторное поле F потенциально, то векторное поле c× F (где c – постоянный вектор) является соленоидальным. Верно ли обратное?

Литература

1. Никольский С.М. Курс математического анализа, том. II- М.: Наука, 1973.

2. Несис Е.И. Методы математической физики. - М.: Просвещение, 1977.

3. Бутузов В.Ф. и др. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных. - М.: Высш. шк. ,1988.

4. Филиппенко В.И. Приложения кратных интегралов. – Кривой Рог, 1998.

5. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – М.: Изд – во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001.